

29) Формула Стокса

S — поверхность в $\mathbb{R}^3$:

1. односвязная
2. гладкая
3. без осовых точек
4. б-р.
5. полная
6. двусторонняя

$\Gamma := \partial S$:

1. гладкая
2. замкнутая

Введем

на S — $\vec{n}(\mathcal{M})$

на Γ — $\vec{t}(\mathcal{M})$, согласованное с $\vec{n}(\mathcal{M})$.

(*) S удовлетв. "коорд." в-ву:

$\forall$ пов-ть на S однознач. проектируемая

$$\text{на } \begin{cases} O_{xy} \\ O_{xz} \\ O_{yz} \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{M}(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} z = z(x, y), (x, y) \in D_z - \\ \text{и т.д.} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{пр-ия на } O_{xy} \end{matrix}$$

$\vec{F}$

$$\vec{a} \in C^1(B_\delta(S)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_S \langle \text{rot } \vec{a}, \vec{n} \rangle d\sigma = \oint_\Gamma \langle \vec{a}, \vec{t} \rangle d\ell$$

До-во:

1) Введем ПДСК, удовн (*).

$$\vec{a} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$$

$$\vec{n}(\mathcal{M}) = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

$$\vec{t}(\mathcal{M}) = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

Т.к. S удовн. (*), то $\forall M \in S$
 координаты ~~вектора~~ $\vec{n}(M)$ сопр. знак. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ можно скорректировать так, что
 $\forall \vec{n}(M), M \in S; n_x, n_y, n_z > 0$.

$$2) \operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \{R'_y - Q'_z, -R'_x + P'_z, Q'_x - P'_y\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint_S [(R'_y - Q'_z) \cos \alpha + (-R'_x + P'_z) \cos \beta + (Q'_x - P'_y) \cos \gamma] \cdot d\sigma$$

$$\cdot d\sigma = \oint (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\ell = \oint P dx + Q dy + R dz$$

Доказано $\square$

$$3)]S: z = z(x, y) \\ (x, y) \in D_z$$



$$\vec{r} = \{x, y, z(x, y)\} \Rightarrow \vec{r}'_x = \{1, 0, z'_x\} \\ \vec{r}'_y = \{0, 1, z'_y\}$$

$$[\vec{r}'_x, \vec{r}'_y] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = \{-z'_x, -z'_y, 1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{[\vec{r}'_x, \vec{r}'_y]}{|[\vec{r}'_x, \vec{r}'_y]|} = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} \{ \downarrow \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_S [P'_x \cos y - P'_y \cos z] d\sigma = \iint_{D_z} \left[\frac{\partial P}{\partial z} \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} 1 \right] dx dy.$$

$$= \iint_{D_z} \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} dx dy =$$

$$= - \iint_{D_z} \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy =$$

$$= - \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} = - \frac{\partial P_1(x, y)}{\partial y}$$

$$= - \iint_{D_z} \frac{\partial P_1}{\partial y} dx dy = \left\{ \iint_{D_z} \left[\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right] dx dy = \right.$$

$$= \oint_{\partial D_z} P_1 dx + Q_1 dy \Big|_{0''} = \int_{\partial D_z} \underbrace{P(x, y, z(x, y))}_{\in \Gamma} = \oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx$$

Аналогично не " = "

D-но.

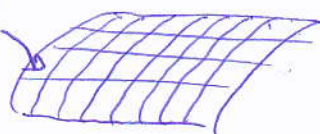
Замечание 1

Однажды аддитивно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ м. считать, что $\int_{\Gamma}$ — криволинейный интеграл

Замечание 2

Из-за лишней 4 координатной св-во не подходит. $z \leq \delta$



30. $\exists \mathcal{D}$ — область в $\mathbb{R}^3$
 $\vec{a}(M)$ — вект. поле

Опр.

Скалярное поле $u(M)$ — потенциальное поле $\vec{a} \Leftrightarrow$

$$\vec{a}(M) \equiv \nabla u(M) \quad \forall M \in \mathcal{D}$$

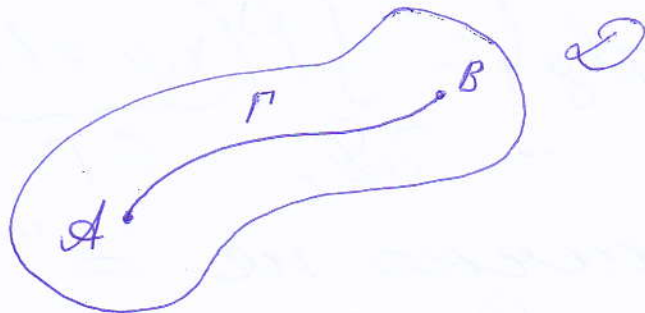
Замечание

Не каждое (даже гладкое) векторное поле потенциально.

$\nexists \vec{a} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$. $\exists \vec{a}$ — потенциально $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P = \frac{\partial}{\partial x} u, \quad Q = \frac{\partial}{\partial y} u$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$



(?) $\int P dx + Q dy$. Когда он зависит только от A и B, а не от Γ ?

Th 68

$\exists \bar{a}(M) \in C\{D\}$. Тогда true(?) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{a}(M)$ - непересекающийся.

$\underbrace{D=bo}_{\Leftrightarrow}$

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) dt =$$

$$= \underbrace{u(x(t_2), y(t_2))}_B - \underbrace{u(x(t_1), y(t_1))}_A$$

Не зависит от γ

$\Rightarrow$ Задача $\forall M_0 \in D$.

$\forall M \in D \neq \int_{M_0, M} P dx + Q dy = u(M)$ - непересекающийся



$$M \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists h > 0: \forall N(x + \Delta x, y), |x| \leq h \Rightarrow \\ \Rightarrow N \in \mathcal{D}$$

Согласно т. М и т. N справедливы $\parallel O_x$.

$$u(N) - u(M) = u(x + \Delta x, y) - u(x, y)$$

$$\int_{M_0, u \in N} P dx + Q dy - \int_{M_0, u} P dx + Q dy = \int_{M_0} P dx + Q dy =$$

$$= \int_{[u, N]} P dx = \left\{ \begin{array}{l} \forall \tau \in [u, N] \Rightarrow \\ \Rightarrow (x + t\Delta x, y) \in [u, N], \\ t \in [0, 1] \end{array} \right\} \cdot \begin{array}{l} 0, y = \text{const} \end{array}$$

$$= \int_0^1 P(x + t\Delta x, y) \Delta x dt = \Delta x \int_0^1 P(x + t\Delta x, y) dt =$$

$$= \{ \exists 0 < \theta < 1 \} = \Delta x P(x + \theta \Delta x, y) \cdot (1 - 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = P(x + \theta \Delta x, y) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0}$$

$$\rightarrow P(x, y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$$

$$\text{Аналогично, } Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

Замечание 1

$$\int_{AB} P dx + Q dy = u(B) - u(A)$$

Замечание 2 $(?) \Leftrightarrow \forall L \subset \mathcal{D} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \oint_L P dx + Q dy = 0$

(6)

Th. 69

$\exists P, Q \in C^1\{\mathcal{D}\}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2, \mathcal{D}$ -односвязно.

Тогда $\int_{\overline{AB}} Pdx + Qdy$ не зависит от $\overline{AB} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ в } \mathcal{D}$$

$\mathcal{D}$ -во

$$\Rightarrow \text{Th. 68} \Rightarrow P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \text{ (у-го } C^2\{\mathcal{D}\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

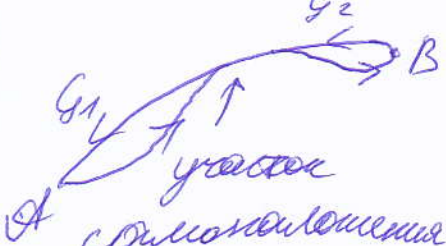
Замечание 2 $\forall L \subset \mathcal{D} \oint Pdx + Qdy = 0$

a)  $\oint Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$



из конеч. числа

Применить 2 к
каждому куску

c)  $\oint = \pm \oint_{G_1} \pm \oint_{G_2} = 0$ (ф-ла Грина)
сложение

(rot a = 0)

a) L - замкнутая кривая с
конеч. числом узлов. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ применить a), b) и c)

b) L - нулево-магная кривая. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ замкнутая линия $I \subset D$.

$$\oint_L P dx + Q dy = \oint_I P dx + Q dy \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ применить d)

Замечание

Все эти th. и замечания верны в $\mathbb{R}^3$